



# **Transformata Fouriera**

*Sylwia Kołoda*

*Magdalena Pacek*

*Krzysztof Kolago*

**Transformacja Fouriera** rozkłada funkcję okresową na szereg funkcji okresowych tak, że uzyskana **transformata** podaje w jaki sposób poszczególne częstotliwości składają się na pierwotną funkcję.

## Definicja

Dla funkcji  $f(x)$  **transformatę Fouriera** definiujemy następująco:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi i x s} dx.$$

Zauważmy, że przy tak postawionej definicji możemy

$f(x)$  zapisać w następujący sposób:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) \cdot e^{2\pi i x s} ds .$$

W praktyce często zmienna  $x$  oznacza czas (w sekundach), a argument transformaty  $s$  oznacza częstotliwość (w  $\text{Hz} = 1/s$ ).

Zauważmy, że:

$$f(x) = E(x) + O(x),$$

gdzie  $E(x)$  jest pewną funkcją parzystą zmiennej  $x$ ,  
natomiast  $O(x)$  jest pewną funkcją nieparzystą.

Wtedy transformata Fouriera funkcji  $f$  redukuje się do postaci:

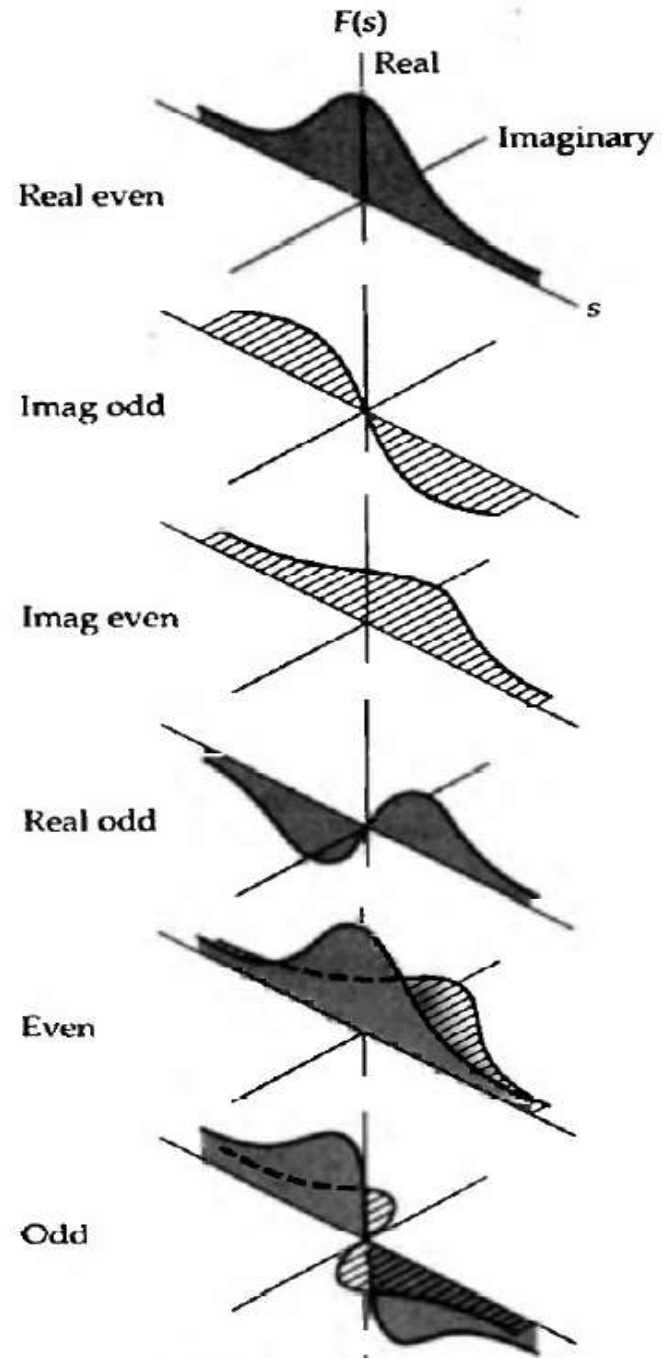
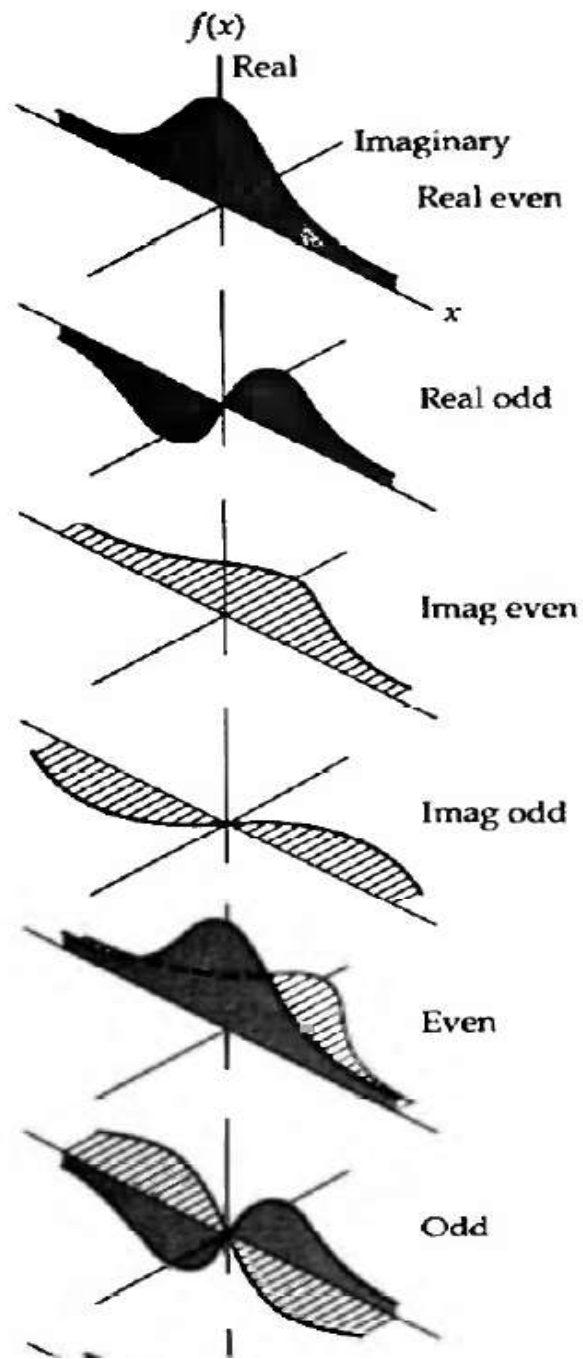
$$2 \int_0^{\infty} E(x) \cdot \cos(2\pi xs) dx - 2i \int_0^{\infty} O(x) \cdot \sin(2\pi xs) dx.$$

Stąd łatwo widać, że jeżeli funkcja jest parzysta, to jej transformata jest parzysta, a jeżeli funkcja jest nieparzysta, to jej transformata jest również nieparzysta.

$$2 \int_0^{\infty} E(x) \cdot \cos(2\pi xs) dx - 2i \int_0^{\infty} O(x) \cdot \sin(2\pi xs) dx.$$

## Własności transformaty Fouriera

własności funkcji $f(x)$	własności transformaty $F(s)$
rzeczywista i parzysta	rzeczywista i parzysta
rzeczywista i nieparzysta	urojona i nieparzysta
urojona i parzysta	urojona i parzysta
zespolona i parzysta	zespolona i parzysta
zespolona i nieparzysta	zespolona i nieparzysta
rzeczywista i antysymatryczna	zespolona i hermitowska
urojona i antysymatryczna	zespolona i antyhermitowska
suma parzystej funkcji rzeczywistej i nieparzystej funkcji urojonej	rzeczywista
suma nieparzystej funkcji rzeczywistej i parzystej funkcji urojonej	urojona
parzysta	parzysta
nieparzysta	nieparzysta





Niech  $\hat{f}(\xi)$  i  $\hat{g}(\xi)$  będą transformacjami Fouriera funkcji  $f(x)$  i  $g(x)$ , odpowiednio. Wtedy:

$a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$	$a \cdot \hat{f}(\xi) + b \cdot \hat{g}(\xi)$
$f(x - a)$	$e^{-2\pi i a \xi} \hat{f}(\xi)$
$e^{2\pi i a x} f(x)$	$\hat{f}(\xi - a)$
$f(ax)$	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$
$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$	$(2\pi i \xi)^n \hat{f}(\xi)$
$x^n f(x)$	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{d^n \hat{f}(\xi)}{d\xi^n}$
$(f * g)(x)$	$\hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$
$f(x)g(x)$	$(\hat{f} * \hat{g})(\xi)$

Ponieważ w praktyce w wyniku pomiarów otrzymujemy dane o charakterze dyskretnym, a nie ciągłym, konieczne jest zdefiniowanie dyskretnego odpowiednika ciągłej transformaty Fouriera (zastępuje się całkę poprzez sumę):

## Definicja

Dla  $N$ -elementowego ciągu  $x_n$  **dyskretną transformatę Fouriera** definiujemy następująco:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N}nk}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Liczenie DFT z definicji:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N}nk}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

gdzie  $x_0, \dots, x_{N-1}$  to próbki sygnału, wymagało (w latach 60-tych) tak ogromnych mocy obliczeniowych, że maszyny z tego okresu ograniczały użycie tego algorytmu.

Rok 1965 przyniósł rewolucję. J. Cooley i J. Tuckey opublikowali pracę pod tytułem „*An Algorithm for the machine computation of complex Fourier series*”, w której opracowali szybszy algorytm liczenia dyskretnej transformaty Fouriera powszechnie znany jako szybka transformata Fouriera (ang. FFT – *Fast Fourier Transform*).

FFT jest to DFT ze zmniejszoną liczbą niezbędnych operacji arytmetycznych. Celem FFT jest zmniejszenie długiego algorytmu obliczeniowego przez jego podział na krótsze i prostsze obliczenia DFT i skrócenie czasu obliczeń. Istnieją różne algorytmy FFT.

W praktyce stosuje się bibliotekę **FFTW** (*Fastest Fourier Transform in the West*). Jest to bardzo szybka biblioteka transformacji Fouriera. FFTW wykorzystuje poza standardowymi wariantami algorytmu FFT Cooley – Tukey’a (dobry dla potęg 2), również algorytmy przydatne dla dużych liczb pierwszych (takie jak algorytm FFT Rader’a oraz algorytm FFT Bluestein’a). FFTW jest biblioteką języka C, ale można jej używać także z Fortrana, C++ .

Najpopularniejszą wersją FFT jest FFT o podstawie 2. Algorytm FFT o podstawie 2 jest bardzo efektywną procedurą wyznaczania DFT pod warunkiem, że rozmiar DFT będzie całkowitą potęgą liczby dwa. Dobrym podejściem jest dodanie wymaganej liczby próbek o wartościach zerowych do części końcowej ciągu danych czasowych, aby dopasować liczbę jego punktów do kolejnego rozmiaru FFT o podstawie 2.

Algorytmy obliczające szybką transformatę Fouriera bazują na metodzie dziel i zwyciężaj rekurencyjnie. To znaczy dzielimy problem na podproblemy o mniejszym rozmiarze, a te rekurencyjnie znów dzielimy na mniejsze itd.

Docierając do dostatecznie małych problemów rozwiązujemy je. Rozwiązanie początkowego problemu jest sumą rozwiązań podproblemów.



Algorytmy FFT dzielą  $N$ -punktowy DFT na  $N/2$ -punktowy DFT itd. Istnieją różne sposoby podziału  $N$ -punktowego DFT na  $N/2$ -punktowe DFT. Dwa najpopularniejsze z nich to DIT (ang. *Decimation In Time*) i DIF (ang. *Decimation In Frequency*).

## DIT – Decimation In Time (Decymacja Czasowa):

O dekompozycję z podziałem czasowym mówimy wówczas, gdy podział (dekompozycja)  $N$ -punktowego DFT na dwa niezależne  $N/2$ -punktowe DFT dotyczy sygnału wejściowego.

Aby dokładnie zobaczyć, jak algorytm DIT FFT wyewoluował z DFT, wróćmy do równania dla  $N$ -punktowej DFT.

## DIT – Decimation In Time (Decymacja Czasowa):

$$X_r = \sum_{l=0}^{N-1} x_l \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N}lr}, \quad r \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (1)$$

Przyjmując oznaczenie  $W_N = e^{-i2\pi/N}$ , dostajemy:

$$X_r = \sum_{l=0}^{N-1} x_l \cdot W_N^{rl}.$$

W dalszych obliczeniach wykorzystamy m.in. własności:

$$(W_N)^{N/2} = -1, \quad W_{N/2} = W_N^2, \quad W_N^N = 1.$$

## DIT – Decimation In Time (Decymacja Czasowa):

Bezpośrednie wyprowadzenie FFT jest oparte na podziale ciągu  $x_n$  danych wejściowych na dwie części, tj. na elementy indeksowane parzyście i nieparzyście; wtedy możemy podzielić równanie (1) na dwie części:

## DIT – Decimation In Time (Decymacja Czasowa):

$$\begin{aligned} X_r &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_{2n} \cdot e^{-i2\pi(2n)r/N} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_{2n+1} \cdot e^{-i2\pi(2n+1)r/N} = \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_{2n} \cdot W_N^{2nr} + W_N^r \cdot \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_{2n+1} \cdot W_N^{2nr} = \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_{2n} \cdot W_{N/2}^{nr} + W_N^r \cdot \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_{2n+1} \cdot W_{N/2}^{nr}. \end{aligned}$$

## DIT – Decimation In Time (Decymacja Czasowa):

A więc mamy teraz dwa sumowania o liczbie składników równej  $N/2$ , których wyniki rozważone łącznie dają nam  $N$ -punktową DFT .

Definiując  $y_n = x_{2n}$  oraz  $z_n = x_{2n+1}$  dostaniemy :

$$Y_r = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} y_k \cdot W_{N/2}^{rk}, \quad r \in \{0, 1, \dots, N/2 - 1\},$$

$$Z_r = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} z_k \cdot W_{N/2}^{rk}, \quad r \in \{0, 1, \dots, N/2 - 1\},$$

a więc to samo co w (1) , po zastąpieniu  $N/2$  przez  $N$ .

## DIT – Decimation In Time (Decymacja Czasowa):

Zatem:  $X_r = Y_r + W_N^r \cdot Z_r, \quad r \in \{0, 1, \dots, N/2 - 1\}.$

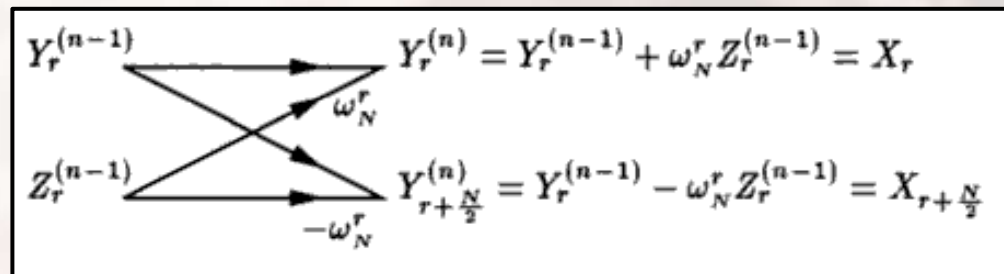
Natomiast wykorzystując  $W_N^{(N/2)+r} = -W_N^r$  dostajemy:

$$\begin{aligned} X_{r+N/2} &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} y_n \cdot W_{N/2}^{(r+N/2)n} + W_N^{r+N/2} \cdot \sum_{n=0}^{(N/2)-1} z_n \cdot W_{N/2}^{(r+N/2)n} = \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} y_n \cdot W_{N/2}^{rn} - W_N^r \cdot \sum_{n=0}^{(N/2)-1} z_n \cdot W_{N/2}^{rn} = \\ &= Y_r - W_N^r \cdot Z_r, \quad r \in \{0, 1, \dots, N/2 - 1\}. \end{aligned}$$

## DIT – Decimation In Time (Decymacja Czasowa):

Następujące DFT dzielimy na kolejne DFT aż do osiągnięcia 2-punktowych DFT (założenie, że długość transformaty jest całkowitą potęgą 2). Tak zapisane DFT przedstawia się zwykle za pomocą grafu przepływu zwanego **motylkiem**

### **Cooley'a-Tukey'a:**



Jest to podstawowa struktura DFT. Każda sekcja jest tworzona z kilku obliczeń motylkowych.



## DIT – Decimation In Frequency (Decymacja Częstotliwościowa):

W algorytmie FFT można rozważać również podział sygnału wyjściowego. Jest to FFT z podziałem częstotliwościowym.

$$\begin{aligned} X_r &= \sum_{l=0}^{(N/2)-1} x_l \cdot W_N^{rl} + \sum_{l=N/2}^N x_l \cdot W_N^{rl} = \\ &= \sum_{l=0}^{(N/2)-1} x_l \cdot W_N^{rl} + \sum_{l=0}^{(N/2)-1} x_{l+N/2} \cdot W_N^{(l+N/2)r} = \\ &= \sum_{l=0}^{(N/2)-1} \left( x_l + x_{l+N/2} \cdot W_N^{rN/2} \right) \cdot W_N^{rl}, \quad r \in \{0, 1, \dots, N-1\}. \end{aligned}$$

## DIT – Decimation In Frequency (Decymacja Częstotliwościowa):

Dla  $r$  parzystego:

$$\begin{aligned} X_{2k} &= \sum_{l=0}^{(N/2)-1} \left( x_l + x_{l+N/2} \cdot W_N^{kN} \right) \cdot W_N^{2kl} = \\ &= \sum_{l=0}^{(N/2)-1} \left( x_l + x_{l+N/2} \right) \cdot W_{N/2}^{kl}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N/2 - 1\}. \end{aligned}$$

Definiując  $Y_k = X_{2k}$  i  $y_l = x_l + x_{l+N/2}$  dostajemy:

$$Y_k = \sum_{l=0}^{(N/2)-1} y_l \cdot W_{N/2}^{kl}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N/2 - 1\}.$$

## DIT – Decimation In Frequency (Decymacja Częstotliwościowa):

Analogicznie dla  $r$  nieparzystego:

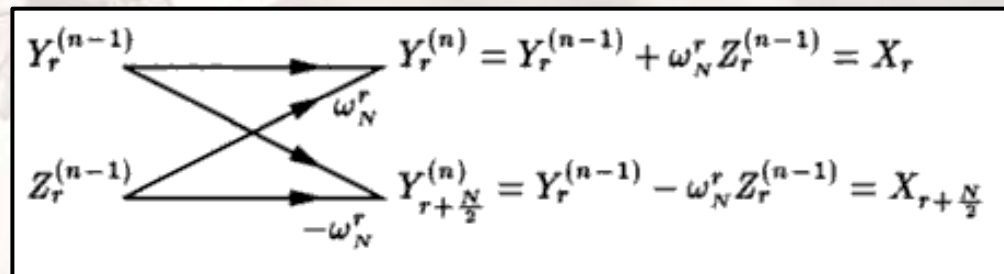
$$\begin{aligned} X_{2k+1} &= \sum_{l=0}^{(N/2)-1} \left( x_l + x_{l+N/2} \cdot W_N^{(2k+1)N/2} \right) \cdot W_N^{(2k+1)l} = \\ &= \sum_{l=0}^{(N/2)-1} \left( x_l - x_{l+N/2} \cdot W_N^l \right) \cdot W_{N/2}^{kl}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N/2 - 1\}. \end{aligned}$$

Definiując  $Z_k = X_{2k+1}$  i  $z_l = (x_l - x_{l+N/2}) \cdot W_N^l$  mamy:

$$Z_k = \sum_{l=0}^{(N/2)-1} z_l \cdot W_{N/2}^{kl}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N/2 - 1\}.$$

## DIT – Decimation In Frequency (Decymacja Częstotliwościowa):

Dla tej wersji DFT graf przepływu (nazywany **motylkiem Gentleman'a-Sande'go**) wygląda następująco:



Gdy  $N$ -punktowe DFT rozłoży się w zbiór 2-punktowych DFT, to wówczas liczba wymaganych operacji spadnie z  $2N^2$  do  $N \log_2 N$ . Stąd złożoność obliczeniowa FFT to  $O(N \log_2 N)$ , zaś DFT liczonego z definicji )  $O(N^2)$ .

N	2	4	8	16	32	64	128
<b>DFT</b>	8	32	128	512	2048	8195	32768
<b>FFT</b>	2	8	24	64	160	384	896

# Zastosowanie szybkiej transformaty Fouriera w analizie uszkodzeń silnika SG 112M-4

*Pliki z danymi pochodzącymi ze sprawnego silnika:*

Measurement filename DAQ	Measurement filename UMC100	Load current [A]	Average rotor speed [rpm]
S2_001.dat	S2_001.log	1.13	1492.44
S2_002.dat	S2_002.log	2.03	1467.69
S2_003.dat	S2_003.log	3.20	1439.34
S2_004.dat	S2_004.log	4.06	1417.59
S2_005.dat	S2_005.log	5.30	1383.14

# Zastosowanie szybkiej transformaty Fouriera w analizie uszkodzeń silnika SG 112M-4

**Pliki z danymi pochodzącymi z silnika z jedną uszkodzoną tarczą wirnika:**

Measurement filename DAQ	Measurement filename UMC100	Load current [A]	Average rotor speed [rpm]
S2_006.dat	S2_006.log	1.11	1492.74
S2_007.dat	S2_007.log	2.06	1465.34
S2_008.dat	S2_008.log	3.17	1439.34
S2_009.dat	S2_009.log	4.08	1415.44
S2_010.dat	S2_010.log	5.30	1379.34

# Zastosowanie szybkiej transformaty Fouriera w analizie uszkodzeń silnika SG 112M-4

**Pliki z danymi pochodzącymi z silnika z dwiema uszkodzonymi tarczami wirnika:**

Measurement filename DAQ	Measurement filename UMC100	Load current [A]	Average rotor speed [rpm]
S2_011.dat	S2_011.log	1.12	1494.14
S2_012.dat	S2_012.log	2.02	1467.74
S2_013.dat	S2_013.log	3.14	1439.89
S2_014.dat	S2_014.log	4.22	1412.99
S2_015.dat	S2_015.log	5.29	1382.64



# Zastosowanie szybkiej transformaty Fouriera w analizie uszkodzeń silnika SG 112M-4

0.00000e+000	-8.9836e-002	-6.8665e-002	-9.5558e-002	2.3484e+002	6.8459e+001	-2.9894e+002	-1.1244e+001	2.4414e-003
1.00000e-004	-2.1801e-001	-7.9536e-002	2.1801e-001	2.4042e+002	5.6638e+001	-2.9358e+002	-2.2478e+001	3.7231e-002
2.00000e-004	-3.3817e-001	-8.8692e-002	3.4447e-001	2.4487e+002	4.8014e+001	-2.8956e+002	-1.8985e+001	9.7656e-003
3.00000e-004	-4.6577e-001	-6.9237e-002	4.7665e-001	2.5049e+002	3.8958e+001	-2.8597e+002	-1.1314e+001	-2.1973e-002
4.00000e-004	-6.0883e-001	-8.2397e-002	5.9509e-001	2.5591e+002	3.0408e+001	-2.8416e+002	-3.7339e+000	5.9814e-002
5.00000e-004	-9.3040e-001	2.4948e-001	5.9624e-001	2.6305e+002	2.0713e+001	-2.8068e+002	-7.1582e+000	2.6855e-002
6.00000e-004	-1.3218e+000	6.7863e-001	5.5962e-001	2.6901e+002	1.0379e+001	-2.7782e+002	-4.7512e+000	2.7466e-003
7.00000e-004	-1.7269e+000	1.1009e+000	5.4989e-001	2.7700e+002	-4.0148e-001	-2.7342e+002	-3.1415e-001	-8.8501e-003
8.00000e-004	-2.1023e+000	1.4803e+000	5.4359e-001	2.8406e+002	-1.1286e+001	-2.6967e+002	3.8805e+000	1.7700e-002
9.00000e-004	-2.5246e+000	1.8745e+000	5.7220e-001	2.8915e+002	-2.1308e+001	-2.6344e+002	6.9308e+000	-3.6621e-002
1.00000e-003	-2.9406e+000	2.2247e+000	6.2485e-001	2.9253e+002	-3.1003e+001	-2.5771e+002	8.6407e+000	5.2490e-002
1.10000e-003	-3.3600e+000	2.5909e+000	7.0038e-001	2.9477e+002	-3.9508e+001	-2.5264e+002	9.3393e+000	4.1809e-002
1.20000e-003	-3.8212e+000	2.9566e+000	7.8564e-001	2.9787e+002	-4.7895e+001	-2.4690e+002	9.3991e+000	-2.0752e-002
1.30000e-003	-4.3041e+000	3.3279e+000	8.8806e-001	3.0114e+002	-5.6311e+001	-2.4195e+002	9.1448e+000	9.1553e-003
1.40000e-003	-4.7853e+000	3.7010e+000	1.0077e+000	3.0278e+002	-6.4221e+001	-2.3719e+002	8.8666e+000	1.7090e-002
1.50000e-003	-5.3032e+000	4.1033e+000	1.1284e+000	3.0401e+002	-7.2058e+001	-2.3049e+002	8.6885e+000	-1.7090e-002
1.60000e-003	-5.8325e+000	4.5124e+000	1.2520e+000	3.0513e+002	-8.0860e+001	-2.2158e+002	8.5644e+000	-4.8828e-003
1.70000e-003	-6.3526e+000	4.8992e+000	1.3979e+000	3.0514e+002	-9.0570e+001	-2.1228e+002	8.4148e+000	2.6245e-002
1.80000e-003	-6.8470e+000	5.2402e+000	1.5627e+000	3.0440e+002	-1.0093e+002	-2.0279e+002	8.2053e+000	1.2207e-003
1.90000e-003	-7.3540e+000	5.5418e+000	1.7464e+000	3.0413e+002	-1.1105e+002	-1.9201e+002	8.0288e+000	-3.5706e-002
2.00000e-003	-7.8363e+000	5.8519e+000	1.9283e+000	3.0508e+002	-1.2074e+002	-1.8176e+002	7.8987e+000	-1.0986e-002
2.10000e-003	-8.3244e+000	6.1340e+000	2.1441e+000	3.0574e+002	-1.3026e+002	-1.7305e+002	7.7640e+000	2.3804e-002
2.20000e-003	-8.8068e+000	6.3818e+000	2.3718e+000	3.0536e+002	-1.3890e+002	-1.6468e+002	7.5696e+000	1.0376e-002
2.30000e-003	-9.2646e+000	6.5992e+000	2.6173e+000	3.0554e+002	-1.4788e+002	-1.5498e+002	7.2973e+000	-3.6926e-002
2.40000e-003	-9.7275e+000	6.8058e+000	2.8845e+000	3.0562e+002	-1.5696e+002	-1.4564e+002	6.9592e+000	-1.8311e-002
2.50000e-003	-1.0197e+001	6.9683e+000	3.1740e+000	3.0431e+002	-1.6438e+002	-1.3809e+002	6.6630e+000	5.6152e-002
2.60000e-003	-1.0628e+001	7.0999e+000	3.4698e+000	3.0394e+002	-1.7424e+002	-1.2862e+002	6.4655e+000	3.1738e-002
2.70000e-003	-1.1066e+001	7.2189e+000	3.8126e+000	3.0420e+002	-1.8385e+002	-1.1884e+002	6.3518e+000	-2.1667e-002
2.80000e-003	-1.1502e+001	7.3036e+000	4.1685e+000	3.0412e+002	-1.9269e+002	-1.0999e+002	6.3159e+000	-3.9063e-002
2.90000e-003	-1.1927e+001	7.3523e+000	4.5399e+000	3.0388e+002	-2.0168e+002	-1.0146e+002	6.2845e+000	1.0681e-002
3.00000e-003	-1.2344e+001	7.3917e+000	4.9307e+000	3.0306e+002	-2.1092e+002	-9.2407e+001	6.2711e+000	1.4954e-002
3.10000e-003	-1.2758e+001	7.3826e+000	5.3381e+000	3.0187e+002	-2.1968e+002	-8.2908e+001	6.2770e+000	9.1553e-004
3.20000e-003	-1.3154e+001	7.3763e+000	5.7592e+000	3.0005e+002	-2.2703e+002	-7.3277e+001	6.2950e+000	-2.1973e-002
3.30000e-003	-1.3527e+001	7.3208e+000	6.1895e+000	2.9742e+002	-2.3293e+002	-6.4147e+001	6.3025e+000	-2.5635e-002
3.40000e-003	-1.3895e+001	7.2521e+000	6.6067e+000	2.9428e+002	-2.3818e+002	-5.5577e+001	6.2426e+000	2.5330e-002
3.50000e-003	-1.4229e+001	7.1697e+000	7.0427e+000	2.8991e+002	-2.4359e+002	-4.7006e+001	6.1200e+000	2.8992e-002
3.60000e-003	-1.4553e+001	7.0524e+000	7.4724e+000	2.8573e+002	-2.4903e+002	-3.7964e+001	5.9794e+000	9.7656e-003
3.70000e-003	-1.4840e+001	6.9185e+000	7.8884e+000	2.8189e+002	-2.5446e+002	-2.8333e+001	5.8013e+000	-2.4414e-003
3.80000e-003	-1.5110e+001	6.7783e+000	8.3239e+000	2.7884e+002	-2.6077e+002	-1.7907e+001	5.6263e+000	-8.5449e-003

# Zastosowanie szybkiej transformaty Fouriera w analizie uszkodzeń silnika SG 112M-4

## Kolejne kolumny w pliku oznaczają:

1. Czas [s],
2. Natężenie w pierwszej fazie [A],
3. Natężenie w drugiej fazie [A],
4. Natężenie w trzeciej fazie [A],
5. Napięcie w pierwszej fazie [V],
6. Napięcie w drugiej fazie [V],
7. Napięcie w trzeciej fazie [V],
8. Przyspieszenie drgań [ $\text{mm/s}^2$ ],
9. Wartość sygnału napięciowego,  
proporcjonalnego do prędkości obrotowej silnika.